XX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

районный тур, решения

2012

1 декабря

7–8 классы

---

1. Восход, Аполлон, Восток, Запад, Меркурий. Найдите лишний элемент в этом списке, обоснуйте свой ответ.

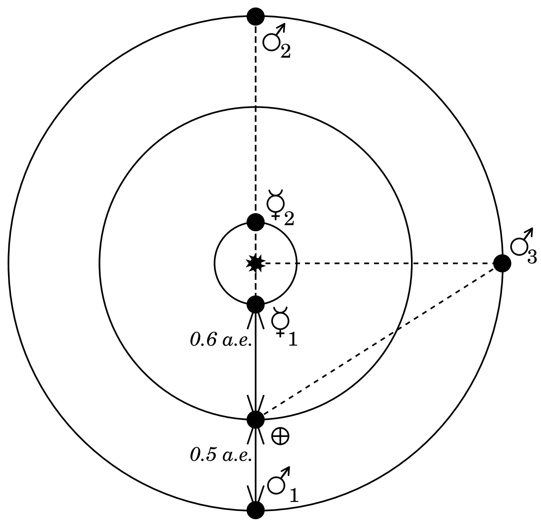
Решение:

«Восход» и «Восток» — это названия советских космических кораблей, «Меркурий» и «Аполлон» — американских. Космического корабля с названием «Запад» не существовало, поэтому Запад — лишний.

2. Минимальное расстояние от Меркурия до Земли — 0.6 астрономических единиц (а.е.), минимальное расстояние от Марса до Земли — 0.5 а.е. Какая из двух планет находится в среднем на большем расстоянии от Земли? Обоснуйте свой ответ.

Решение:

Ответ на вопрос задачи становится ясным, если вспомнить, что Марс — более далекая планета от Солнца, чем Земля (т.н. «внешняя» планета), а Меркурий — более близкая (т.н. «внутренняя» планета), и нарисовать рисунок, аккуратно изобразив на нем орбиты планет.



Из рисунка очевидно, что в среднем Марс (♂) дальше от Земли ($\oplus$), чем Меркурий (☿). В общем-то, это и есть полное решение (вместе с рисунком).

Но можно и доказать это положение. Зафиксируем Землю в одной точке и рассмотрим несколько положений двух других планет относительно нее. В наиболее близком к Земле положении Марс ($♂_1$) ближе, чем Меркурий ($☿_1$), как ясно из условия задачи. В самом дальнем ($♂_2$ и $☿_2$), очевидно, наоборот. Покажем, что Марс в положении $♂_3$ находится от Земли дальше, чем Меркурий в положении $☿_2$, т.е. самом дальнем для Меркурия. В прямоугольном треугольнике «Солнце – Земля – Марс $♂_3$» искомое расстояние $\oplus$–$♂_3$ является гипотенузой. Один из его катетов — это радиус орбиты Земли, другой — радиус орбиты Марса. Теперь осталось вспомнить, что астрономическая единица (а.е.) — это как раз радиус орбиты Земли. Тогда один из катетов этого треугольника равен 1, а другой 1.5, следовательно, квадрат гипотенузы равен $1^2 + 1.5^2 = 3.25$ (а.е.)^2. Можно даже не извлекать квадратный корень, а сравнить квадрат этого расстояния с квадратом расстояния ⊕–☿$_2$ (т.к. возводить в квадрат без калькулятора легче, чем извлекать квадратный корень). Это расстояние, очевидно (см. рисунок) равно 1.4 а.е., тогда его квадрат равен 1.96 (а.е.)^2. Таким образом расстояние ⊕–♂$_3$ больше, чем расстояние ⊕–☿$_2$, т.е. в половине возможных положений относительно Земли Марс дальше от нее, чем Меркурий в самом дальнем положении от Земли. Следовательно, и в среднем Марс дальше от Земли, чем Меркурий.

3. Школьник вышел вчера из дома и увидел Луну над трубой соседнего дома. Вчера он пришел в школу вовремя. Сегодня школьник, выйдя утром из дома, увидел Луну в том же самом месте, что и вчера. Учитывая, что школьник тратит на дорогу одно и то же время, а занятия всегда начинаются в 9 часов утра, скажите, опоздал он сегодня на занятия или пришел заранее, и оцените, насколько.

Решение:

Луна движется по орбите вокруг Земли и из-за этого смещается относительно звезд и Солнца на земном небе. Движение Луны по орбите происходит в ту же сторону (против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса), что и суточное вращение Земли. Следовательно, среди звезд Луна движется против суточного вращения неба, которое, очевидно, обратно суточному вращению Земли. Таким образом, каждые сутки точка, в которой находится Луна в некоторое определенное время, смещается к востоку относительно положения Луны в то же время в предыдущие сутки. Следовательно, чтобы достигнуть такого же положения относительно некоторого направления на поверхности Земли (например, направления «крыльцо дома школьника – труба соседнего дома»), Луне нужно еще какое-то время двигаться вместе с вращением неба. Так что школьник опоздал на занятия.

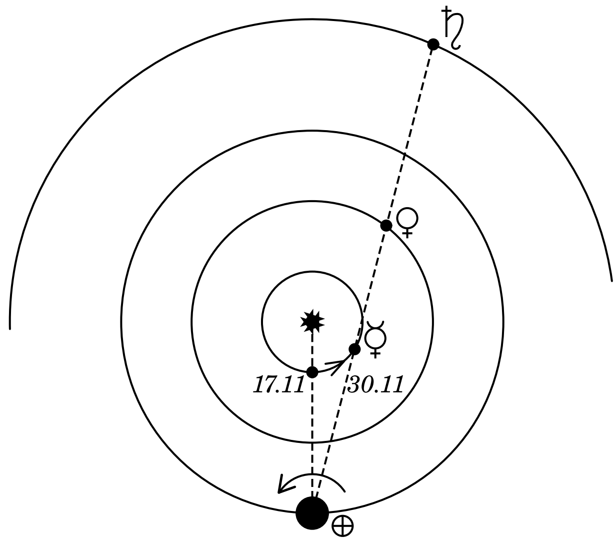
Оценим насколько. Полный оборот вокруг Земли Луна совершает за 27.5 суток. Таким образом полное смещение за земные сутки составит около $360/27.5 \approx 13°$, т.е. Луна в некоторое определенное время суток окажется на 13° восточнее, чем в то же время в предыдущие сутки, т.е. отстанет от суточного вращения неба. Чтобы «скомпенсировать» это отставание, ей нужно пройти эти 13° со скоростью суточного вращения неба. Земля делает полный оборот в 360° за 24 часа, т.е. за час небо проходит 15°. Следовательно, школьник опоздал на 13/15 часа, т.е. на 52 минуты.

Примечание. При расчетах мы пренебрегли тем, что Луна во время компенсации отставания продолжает отставать от суточного вращения неба, т.е. смещается с чуть меньшей скоростью. Также мы пренебрегли тем, что время, по которому живет школьник (т.н. гражданское время), солнечное, т.е. гражданские сутки продолжаются чуть больше (примерно на 4 минуты), чем один оборот Земли вокруг своей оси относительно других («неподвижных») звезд. Это происходит из-за того, что Земле нужно немного «довернуться» вокруг своей оси, чтобы конкретная точка земной поверхности оказалась в таком же положении относительно Солнца, что и сутки назад, т.к. необходимо скомпенсировать движение Земли по орбите вокруг Солнца. Все эти добавки очень мало меняют ответ, поэтому ими можно пренебречь.

4. 17 ноября этого года Меркурий был в нижнем соединении (т.е. находился между Землей и Солнцем примерно на одной линии с ними). 27 ноября можно было наблюдать соединение Венеры и Сатурна, а вчера Меркурий, Венера и Сатурн составили мини-парад. В какое время суток и в какой стороне горизонта можно было наблюдать это красивое явление? Ответ обоснуйте.

Решение:

Меркурий, как и другие планеты Солнечной системы, движется вокруг Солнца против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса. Скорость его движения по орбите больше, чем у Земли, поэтому после нижнего соединения он смещается вправо от Солнца для наблюдателя в северном полушарии Земли. Следовательно, когда Меркурий (☿), Венера (♀) и Сатурн (♄) составили парад, они располагались в пространстве примерно так, как на рисунке (на рисунке планеты, Солнце и орбита Сатурна изображены не в масштабе).



Земля вращается вокруг своей оси также против часовой стрелки (если смотреть с северного полюса) и при этом с запада на восток. Поэтому при таком положении планет и Солнца в пространстве для земного наблюдателя планеты будут располагаться западнее Солнца. Следовательно вечером (на западе) они зайдут раньше, чем зайдет Солнце и видны не будут. А вот утром на востоке они взойдут немного раньше Солнца и этот парад можно будет увидеть.

5. Где-то в Галактике некая звезда сбросила оболочку массы 10^{29} кг. Оболочка расширяется таким образом, что в каждый момент времени ее толщина равна половине внешнего радиуса, причем внешние края оболочки удаляются от звезды с постоянной скоростью 10 км/с. Известно, что оболочка становится невидимой для земного наблюдателя, когда ее средняя плотность оказывается меньше 10^{-21} кг/м^3. Через какое время после сброса оболочки она станет невидимой?

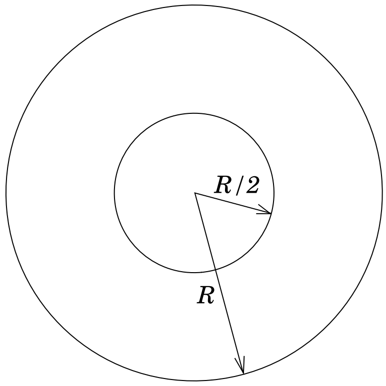
Решение:

Так как мы знаем скорость удаления внешних частей оболочки от звезды v, то мы можем найти время, за которое оболочка станет невидимой, если будем знать внешний радиус оболочки, при котором ее средняя плотность станет равна 10^{-21} кг/м^3. Обозначим такой радиус R. Тогда искомое время $t = R/v$, т.к. внешний край оболочки «стартует» от звезды и должен пройти расстояние, равное получившемуся радиусу.

Масса оболочки M все время остается постоянной, поэтому можно найти такой объем V, при котором оболочка будет иметь среднюю плотность $\rho = 10^{-21}$ кг/м^3:

$$V = \frac{M}{\rho} = \frac{10^{29}}{10^{-21}} = 10^{29-(-21)} = 10^{50}\ \text{м}^3 = 10^{50-9} = 10^{41}\ \text{км}^3$$

Оболочка (см. рисунок оболочки в разрезе) имеет форму шара радиусом R, из которого «вырезан» шар радиусом $R/2$, т.к. известно, что толщина оболочки всегда равна половине внешнего радиуса. Тогда очевидно, что объем оболочки будет равен разности объемов большого V_1 и малого V_2 шаров. Объем шара $V = \frac{4\pi}{3}R^3$. Тот, кто не знаком с формулой объема шара, может воспользоваться формулой для объема куба с ребром R: $V = R^3$. Видно, что при вычислении R ошибка в случае куба будет примерно в $\sqrt[3]{4} \approx 1.6$ раза.



Найдем объем оболочки:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{4\pi}{3}R^3 - \frac{4\pi}{3}\left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{4\pi}{3}(R^3 - \frac{R^3}{8}) = \frac{4\pi}{3}\frac{7R^3}{8} \approx 3.5R^3$$

Объем нам известен. Отсюда:

$$10^{41} = 3.5R^3 \quad \Rightarrow \quad 10 \cdot 10^{40} = 3.5R^3 \quad \Rightarrow \quad R^3 \approx 3 \cdot 10^{40} \quad \Rightarrow$$

$$R = \sqrt[3]{3 \cdot 10^{40}} = \sqrt[3]{30} \cdot \sqrt[3]{10^{39}} = \sqrt[3]{30} \cdot 10^{\frac{39}{3}} \approx \sqrt[3]{27} \cdot 10^{13} = 3 \cdot 10^{13}\,\text{км}$$

Вычислим время

$$t = \frac{R}{v} = \frac{3 \cdot 10^{13}\,\text{км}}{10\,\text{км/с}} = 3 \cdot 10^{12}\,\text{с}$$

Такое большое время удобнее выразить в годах. В одном году содержится $60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \approx 3 \cdot 10^7$ с. Тогда искомое время будет равно:

$$t = \frac{3 \cdot 10^{12}}{3 \cdot 10^7} = 10^5, \text{ или 100 тысяч лет.}$$